Самогравитирующий шаровой слой гипотетического релятивистского газа

И.Ш. Муждабаев*

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезмий, ул. Ш. Мирзо, 47А, 100140, Самарканд, Узбекистан

Получена 30.09.2020

* Corresponding author: e-mail ismet.sh@mail.ru

В рамках общей теории относительности построена модель равновесной конфигурации, представляющей собой шаровой слой из гипотетического релятивистского газа, в котором возможны отклонения от закона Паскаля, устанавливающего изотропность давления, свойственную идеальной жидкости. Полученная модель может быть использована в описании наблюдательных свойств релятивистского гравитирующего объекта.

Ключевые слова: релятивистский объект, внутренние решения, равновесная гравитационная конфигурация.

Within the framework of general relativity, a model of an equilibrium configuration of gravitating object is constructed. The spherical symmetric object studied consists of a spherical layer of a hypothetical relativistic gas, where deviations from Pascal's law maybe allowed, which establish the pressure isotropy being responsible to an ideal fluid. The obtained model has importance in describing observational properties of relativistic gravitating objects.

Keywords: relativistic objects, interior solutions, equilibrium gravitating configuration

I. Введение

Среди точно решаемых задач общей теории относительности широкое применение в астрофизических приложениях получили решения, описывающие гравитационное поле изолированного невращающегося материального объекта. Предположение о наличии подобной идеализированной физической ситуации, тем не менее, с достаточно высокой точностью приемлемо к реальным астрофизическим объектам [1-6].

В случае сферической симметрии статической массы в общей теории относительности распределение изотропного давления вещества, свойственное идеальной жидкости, является монотонно убывающей функцией радиальной координаты r [5, 6].

Вследствие этого, в соответствии с условием гидростатического равновесия, невозможно существование равновесного шарового слоя вещества в собственном поле тяготения, так как давление с необходимостью должно обратиться в нуль при двух различных значениях r. Ситуация изменяется, если в тензоре энергии-импульса T_{μ}^{ν} давление вещества анизотропное: $T_1^1 \equiv p_r \neq T_2^2 = T_3^3 \equiv p_\perp$, p_r и $p_\perp$ интерпретируются как радиальное и тангенциальное давления соответственно (в работах [7-23] были найдены внутренние решения уравнений гравитационного поля для шаров с анизотропным распределением вещества и на их основе построены модели релятивистских объектов).

Для шарового слоя условия сшивки с пустой областью мира не налагают условий на тангенциальное давление $p_\perp$, а $p_r = 0$ при двух значениях $r = R_1$ и $r = R_2$ радиальной координаты. Данное требование выполняется, если распределение радиального давления имеет вид:

$$p_r = f(r)(r - R_1)(R_2 - r)\,. \qquad (1)$$

Здесь положительная функция $f(r)$ определена в интервале $R_1 < r < R_2$.

Решения указанного вида релятивистских уравнений гравитационного поля для шарового слоя вещества были рассмотрены в работах [24-26]. Простейшее аналитическое решение, полученное в [24], соответствует шаровому слою с постоянной плотностью массы $\mu = const$.

II. Основная часть

Аналитическое решение можно получить и для шарового слоя вещества в газообразном состоянии с анизотропным давлением (разумеется, если предположить существование такого гипотетического релятивистского газа, в котором возможны отклонения от закона Паскаля, устанавливающего изотропность давления, свойственную идеальной жидкости). В такой конфигурации плотность массы $\mu(r)$, также как и давление p_r, должна обращаться в нуль на внутренней $r = R_1$ и внешней $r = R_2$ границах шарового слоя.

В стандартных шварцшильдовых координатах

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)}dt^2 + e^{\nu(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (2)$$

уравнения равновесия имеют вид [27]:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\mu\,, \qquad (3)$$

$$e^{-\nu}\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p_r\,, \qquad (4)$$

$$e^{-\nu}\left(\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda' - \nu'}{2r}\right) = 8\pi p_\perp\,. \qquad (5)$$

Штрихами обозначены производные по r; скорость света c и гравитационная постоянная G равны единице.

Запишем уравнения (3) и (4) следующим образом:

$$e^{-\nu} = 1 - \frac{m(r)}{r}\,, \qquad (6)$$

$$\lambda' = \frac{8\pi p_r r^3 + m(r)}{r^2\left[1 - \frac{m(r)}{r}\right]}\,, \qquad (7)$$

где

$$m(r) = 8\pi\int_{R_1}^{r}\mu r^2 dr\,. \qquad (8)$$

Распределение плотности массы выберем в виде:

$$\mu = \frac{B}{8\pi r^2}(r - R_1)(R_2 - r)\,. \qquad (9)$$

Тогда

$$e^{-\nu} = 1 - \frac{B}{6r}(r - R_1)^2(3R_2 - R_1 - 2r) \qquad (10)$$

Из уравнения (7) следует, что на внутренней границе $r = R_1$ рассматриваемой конфигурации

$$\left|p_r \sim \frac{\lambda'}{r} \sim \ldots 0\right|_{r=R_1}..$$

Поэтому выбирая

$$\lambda' = \frac{S(r - R_1)}{r(T - r)}\,, \qquad (11)$$

где константы S и T такие, что $p_r(R_2)=0$, имеем:

$$e^{\lambda} = Ar^{-\frac{SR_1}{T}}(T - r)^{-S\left(1 - \frac{R_1}{T}\right)}, \quad A = const\,. \qquad (12)$$

Сшивая теперь на границе $r = R_2$ найденное решение (10)-(12) с внешним решением Шварцшильда, получаем:

$$B = 6\alpha(R_2 - R_1)^{-3}, \qquad (13)$$

$$A = R_2^{\frac{SR_1}{T}}(T - R_2)^{S\left(1 - \frac{R_1}{T}\right)}\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right), \qquad (14)$$

$$T = R_2 - S(R_2 - R_1) + \frac{6SR_2}{B(R_2 - R_1)^2}\,, \qquad (15)$$

α – гравитационный радиус.

Во внутренней области шарового слоя $0 < r < R_1$

$$e^{\nu} = 1,\ e^{\lambda} = e^{\lambda(R_1)} = const\,.$$

© Академия наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2020 г.

Распределения $p_r(r)$ и $p_\perp(r)$ определяются соответственно из уравнений (4) и (5) после подстановки в них функций (10)-(12). Выражение для радиального давления приводится к следующему виду:

$$p_r = \frac{(r-R_1)(R_2-r)}{8\pi r^3(T-r)}\left[\frac{S}{(R_2-R_1)^2}(3R_1R_2-R_1^2-2R_2r)+\frac{1}{6}B(S-1)(r-R_1)(3R_2-R_1-2r)\right]. \quad (16)$$

При $r = R_2$ из формулы (10) имеем:

$$1-(B/6R_2)(R_2-R_1)^{-3}\rangle 0$$

Следовательно, переписав равенство (15) в виде:

$$\frac{B}{6R_2}(R_2-R_1)^2\frac{T-R_2}{S}=1-\frac{B}{6R_2}(R_2-R_1)^3,$$

получаем

$$\frac{T-R_2}{S}>0\,. \quad (17)$$

Наконец, требуя, чтобы давление p_r, также как и плотность массы, при $r = 2R_1R_2/(R_1+R_2)$ принимало максимальное свое значение, можно определить и постоянную S.

III. Заключение

Таким образом, найденное решение уравнений гравитационного поля с квадратичной формой пространства-времени описывает поле

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\frac{B}{6r}(r-R_1)^2(3R_2-R_1-2r)}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)-$$
$$-Ar^{-\frac{SR_1}{T}}(T-r)^{-S(1-\frac{R_1}{T})}dt^2.$$

тяготения, создаваемое шаровым слоем релятивистского анизотропного газа. В свете новых наблюдательных данных полученное новое решение уравнений Эйнштейна может быть использовано в астрофизических приложениях общей теории относительности.

Благодарности. Автор выражает свою признательность доктору физ.-мат. наук, проф. Б.Ж. Ахмедову за обсуждение результатов данной работы.

Метаданные

Self-gravitating spherical layer of a hypothetical relativistic gas

I.Sh. Muzhdabaev

Samarkand branch of Tashkent University of Informational Technology, Sh. Mirzo, 47A, 100140, Samarkand, Uzbekistan

Within the framework of general relativity, a model of an equilibrium configuration of gravitating object is constructed. The spherical symmetric object studied consists of a spherical layer of a hypothetical relativistic gas, where deviations from Pascal's law maybe allowed, which establish the pressure isotropy being responsible to an ideal fluid. The obtained model has importance in describing observational properties of relativistic gravitating objects.

Keywords: relativistic objects, interior solutions, equilibrium gravitating configuration

Литература (References)

[1] D. Kramer, Kh. Shtefani, M. Mak-Kallum, E. Kherl't. Tochnie resheniya uravneniy Einstein. Edited by E. Shmuttser (Moskva, Energoizdat, 1982).

[2] L.Sh. Grigorian, G.S. Sahakian. Theory of Superdense Matter and Degenerate Stellar Configurations, Astrophys. and Space Sci. **95**, No.2, 305-356 (1983).

[3] S.L. Shapiro, S.A. T'yukolski. Chernie dyri, belie karliki i neitronnie zvezdy (Moskva, Mir, 1985).

[4] L.Ya. Arifov, I.Sh. Muzhdabaev. Sfericheskie analiticheskie modeli v relyativistskoy teorii gravitatcii. Dep. v VINITI, № 8345-B86 (1986).

[5] Dj. Uiler, B. Garrison, M. Vakano, K. Torn. Teoriya gravitatcii i gravitatcionniy kollaps (Moskva, Mir, 1967).

[6] Ch. Mizner, K. Torn, Dj. Uiler. Gravitatsiya (Moskva, Mir, 1977).

[7] B.Kuchowicz. General Relativistic Fluid Spheres. IV. Differential Equations for Non-Charged Spheres of Perfect Fluid. Acta Phys. Polon. B **2**. No. 5, 657-667 (1971).

[8] R.L. Bowers, E.P.T. Liang. Anisotropic Spheres in General Relativity. Astrophys. J. **188**, No. 3, 657-665 (1974).

[9] H. Heintzmann, W. Hillebrandt. Neutron Stars with an Anisotropic Equation of State: Mass, Redshift and Stability. Astron. and Astrophys. **38**, No. 1, 51-55 (1975).

[10] M. Cosenza, L. Herrera, M. Esculpi, L. Witten. Some Models of Anisotropic Spheres in General Relativity. J. Math. Phys. **22**, No. 1, 118-125 (1981).

© Академия наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2020 г.

[11] M. Cosenza, L. Herrera, M. Esculpi, L. Witten. Evolution of Radiating Anisotropic Spheres in General Relativity. Phys. Rev. D **25**, No. 10, 2527-2535 (1982).
[12] S.Ş. Bayin. Anisotropic Fluid Spheres in General Relativity. Phys. Rev. D **26**, No. 6, 1262-1274 (1982).
[13] B.W. Stewart. Conformally Flat, Anisotropic Spheres in General Relativity. J. Phys. A **15**. No. 8, 2419-2427 (1982).
[14] . K.D. Krori, P. Borgohain, R. Devi. Some Exact Anisotropic Solutions in General Relativity. Canadian J. Phys. **62**, No. 3, 239-246 (1984).
[15] V.A. Filimonov. In abstracts of Vsesoyuznoy konferentsii «Sovremennie teoreticheskie i eksperimental'nie problemy teorii otnositel'nosti i gravitatsii». Red. V.N. Ponomarev (Moskva, 1984).
[16] L. Herrera, J. Jiménez, L. Leal, J. Ponce de León, M. Esculpi, V. Galina. Anisotropic Fluids and Conformal Motions in General Relativity. J. Math. Phys. **25**. No. 11. 3274-3278 (1984).
[17] L. Herrera, J. Ponce de León. Anisotropic Spheres Admitting a One-Parameter Group of Conformal Motions. J. Math. Phys. **26**. No. 8, 2018-2023 (1985).
[18] L. Herrera, J. Ponce de León. Confined Gravitational Fields Produced by Anisotropic Fluids. J. Math. Phys. **26**, No. 11, 2847-2849 (1985).
[19] V.A. Filimonov. Massy neitronnikh zvezd s tverdoy vnutrenney obolochkoy. Izvestiya Vuzov. Fizika **29**, No. 2, 46-49 (1986).
[20] P.S. Letelier, P.S.C. Alencar. Anisotropic Fluids with Multifluid Components. Phys. Rev. D **34**, No. 2, 343-351 (1986).
[21] L.S. Solov'ev. Ob ogranichennikh konfiguratsiyakh v obshei teorii otnositel'nosti. (Preprint № 4166/1, Institut atomnoy energii, Moskva, 1985).
[22] L.S. Solov'ev, T.D. Kuznetcova. O gazodinamike i ustoichivosti relyativistskikh zvezd. In book: Problemy teorii gravitatcii i elementarnekh chastits. Vyp.. 15. Red. K.P. Stanyukovich ((Moskva, Energoizdat, 1985).
[23] L.S. Solov'ev. Ob ogranichennikh gravitiruyushikh konfiguratsiyakh v obshei teorii otnositel'nosti. In book: Problemy teorii gravitatsii i elementarnikh chastits. Vyp. 17. Red. V.N. Mel'nikov (Moskva, Energoizdat, 1986).
[24] C. Leibovitz. An Exact Solution for a Static Spherical Shell of Matter in Vacuum. Nuovo Cimento B **59**, No. 1, 33-38 (1969).
[25] T.L. Chow. On the Line Element of a Static Spherical Shell of Matter in Vacuum. Nuovo Cimento B **37**, No. 2, 214-218 (1977).
[26] I.Sh. Muzhdabaev. Analiticheskie modeli sfericheskogo sloya veshestva s anizotropnim uravneniem sostoyaniya. In abstracts: Nauchno-metodicheskoy konferentsii «Aspekty voennikh, voenno-tekhnicheskikh nauk i ikh prilozheniya (Samarkand, SVVAKIU, 1994).
[27] L.D. Landau, E.M. Lifshits. Teoriya polya (Moskva, Nauka, 1973).

Гипотетик релятивистик газни гравитацион шарсимон қатлами

И.Ш. Муждабаев

Тошкент информацион технологиялар университетини Самарканд филиали, Ш. Мирзо кўчаси, 47А, 100140, Самарканд, Узбекистан

Умумий нисбийлик назарияси доирасида гравитацион объектларнинг мувозанат конфигурацияси модели қўрилди. Ўрганилаётган сферик-симметрик объект, гипотетик релятивистик газнинг сферик қатламидан иборат бўлиб, у ерда идеал суюқликнинг изотроплигини тушунтирадиган Паскал қонунларидан четлашиш рўй бериши мумкин. Олинган модель релятивистик гравитацион объектларнинг астрономик кузатув хусусиятларини тавсифлашда муҳим аҳамиятга ега.

Калит сўзлар: гравитацион объект, сферик қатлам, мувозанат конфигурация, гипотетик релятивистик газ

© Академия наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2020 г.