Шаровой слой анизотропного вещества во внешнем гравитационном поле центрального источника

И.Ш. Муждабаев*

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хорезмий, ул. Ш. Мирзо, 47А, 100140, Самарканд, Узбекистан

Получена 30.09.2020

* Corresponding author: e-mail ismet.sh@mail.ru

Предложено новое точное аналитическое решение уравнений гравитационного поля Эйнштейна, описывающее равновесное состояние шарового слоя анизотропного вещества, находящегося во внешнем сферически-симметричном шварцшильдовом поле центрального гравитационного источника. Найдены области допустимых значений параметров решения, при которых оно имеет физический смысл. Полученное решение может быть использовано в релятивистской астрофизике для описания свойств вещества вблизи компактных гравитационных объектов.

Ключевые слова: анизотропное вещество, точное решение, гравитационная оболочка, сферически симметричный объект.

A new analytical exact solution of the Einstein gravitational field equations is proposed, which describes the equilibrium state of a spherical layer of anisotropic matter located in an external spherical symmetric Schwarzschild field of a central gravitational source. The ranges of admissible values of the solution parameters are found using conditions at which the obtained solution has a physical meaning. The obtained solution can be used to describe the surrounding matter properties in the close environment of gravitational compact objects in relativistic astrophysics.

Keywords: anisotropic matter, exact solution, gravitating shell, spherical symmetric objects

I. Введение

Статические решения уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости в случае сферической симметрии широко используются в астрофизических приложениях общей теории относительности в качестве моделей нейтронных, сверхмассивных звезд и белых карликов [1-14]. С их помощью удается исследовать основные закономерности распределения вещества, находящегося в механическом и термодинамическом равновесии. В гравитационном поле, создаваемом сферическим источником, распределение изотропного давления вещества является монотонно убывающей функцией радиальной координаты r [2, 15, 16]. По этой причине в общей теории относительности в соответствии с условием гидростатического равновесия невозможно существование равновесного шарового слоя вещества в собственном поле тяготения, так как давление с необходимостью должно обратиться в нуль при двух различных значениях r. Но ситуация кардинально изменяется, если в тензоре энергии-импульса T_μ^ν давление вещества анизотропное. Диагональные элементы тензора энергии-импульса будут $T_0^0 = -\mu$, $T_1^1 = p_r$, $T_2^2 = T_3^3 \equiv p_\perp$, где μ – плотность массы, а

p_r и $p_\perp$ интерпретируются соответственно как радиальное и тангенциальное давления. Условия сшивки шарового слоя с пустой областью мира не налагают при этом условий на тангенциальное давление $p_\perp$, а $p_r = 0$ при двух значениях $r = R_1$ и $r = R_2$ радиальной координаты. Это требование выполняется, если распределение радиального давления имеет вид:

$$p_r = f(r)(r - R_1)(R_2 - r), \tag{1}$$

где положительная функция $f(r)$ определена в интервале $R_1 < r < R_2$.

Статические решения уравнений Эйнштейна данного типа для шарового слоя вещества были получены в работах [17-19].

II. Основная часть

Проведенное нами исследование показало, что возможным оказывается также равновесное состояние шарового слоя вещества, находящегося во внешнем шварцшильдовом поле произвольного центрального источника.

Запишем в шварцшильдовых координатах

$$ds^2 = -\exp(\lambda(r))dt^2 + \exp(\nu(r))dr^2 + \\ + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{2}$$

систему уравнений Эйнштейна:

$$\exp(-\nu)\left(\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\mu; \tag{3}$$

$$\exp(-\nu)\left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p_r; \tag{4}$$

$$\exp(-\nu)\left(\frac{\lambda''}{2} + \frac{\lambda'^2}{4} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda' - \nu'}{2r}\right) = 8\pi p_\perp. \tag{5}$$

Здесь штрихами обозначены производные по r; скорость света c и гравитационная постоянная G равны единице.

Перепишем теперь уравнения (3) и (4) следующим образом:

$$\exp(-\nu) = 1 - \frac{m(r)}{r}, \tag{6}$$

$$\lambda' = \frac{8\pi p_r r^3 + m(r)}{r^2[1 - \frac{m(r)}{r}]}, \tag{7}$$

где

$$m(r) = 8\pi\int_{R_1}^{r}\mu r^2 dr. \tag{8}$$

Если принять в равенстве (1)

$$f(r) = A / r^2, \quad A = const, \tag{9}$$

а плотность массы

$$\mu = \frac{3B}{8\pi} = const, \tag{10}$$

то, решив систему (6)-(7), для гравитационного поля такой конфигурации можно получить следующую квадратичную форму пространства-времени:

$$ds^2 = (1 - Br^2)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - Cr^{-8\pi AR_1R_2} \\ \times(1 - Br^2)^{4\pi A(R_1R_2 - \frac{R_1+R_2}{\sqrt{B}} + \frac{1}{B}) - \frac{1}{2}}(1 + \sqrt{B}r)^{\frac{8\pi A}{\sqrt{B}}(R_1+R_2)}dt^2, \tag{11}$$

где C – константа интегрирования, а R_1 и R_2 – соответственно внутренняя и внешняя границы шарового слоя вещества. Выражение для тангенциального компонента давления имеет вид:

$$p_\perp = \frac{3B^2r^2}{32\pi(1 - Br^2)} + A\left\{\frac{R_1 + R_2 - 2r}{2r} + \right. \\ \left. + \frac{(r - R_1)(R_2 - r)}{1 - Br^2}\left[B + \frac{2\pi A}{r^2}(r - R_1)(R_2 - r)\right]\right\}. \tag{12}$$

На внешней границе $r = R_2$ слоя решение (11) гладко сшивается с внешним решением Шварцшильда, если

$$B = \alpha / R_2^3, \tag{13}$$

$$C = R_2^{8\pi AR_1R_2}\left(1 - (\alpha / R_2)\right)^{\frac{3}{2} - 4\pi A(R_1R_2 - \frac{R_1+R_2}{\sqrt{\alpha/R_2^3}} + \frac{1}{\alpha/R_2^3})} \times \\ \times\left(1 + \sqrt{(\alpha / R_2)}\right)^{\frac{-8\pi A}{\sqrt{\alpha/R_2^3}}(R_1+R_2)}. \tag{14}$$

© Академия наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2020 г.

Здесь α – гравитационный радиус всей конфигурации.

На внутренней же границе $r = R_1$ решение (11) сшивается с решением

$$ds^2 = (1-\frac{\tilde{\alpha}}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - D(1-\frac{\tilde{\alpha}}{r})dt^2, \tag{15}$$

где $$\tilde{\alpha} = \alpha(R_1/R_2)^3 \tag{16}$$ является гравитационным радиусом источника в центре симметрии, а

$$D = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{8\pi A R_1 R_2}\left[\frac{1-\frac{\alpha}{R_2}}{1-\frac{\alpha}{R_2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}-4\pi A\left(R_1R_2-\frac{R_1+R_2}{\sqrt{\alpha/R_2^3}}+\frac{1}{\alpha/R_2^3}\right)}\left(\frac{1+\sqrt{\frac{\alpha}{R_2}}}{1+\sqrt{\frac{\alpha}{R_2}}\frac{R_1}{R_2}}\right)^{-\frac{8\pi A}{\sqrt{\alpha/R_2^3}}(R_1+R_2)}. \tag{17}$$

III. Обсуждение результатов

Как видно из формул (1) и (9), радиальное давление p_r максимально при

$$r = \alpha\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$$

и спадает до нуля на обеих границах шарового слоя. Тангенциальный компонент давления $p_\perp$ монотонно возрастает от минимального значения на внутренней поверхности слоя до максимума на внешней границе. Физические условия положительности и ограниченности величин μ, p_r и $p_\perp$ и энергодоминантности ($\mu \geq p_r$, $\mu \geq p_\perp$) во всей области шарового слоя налагают ограничения на возможные значения параметров A и α/R_2:

$$0 < A < \frac{3\alpha^2R_1^3}{8\pi R_2^6\left[1-\frac{\alpha}{R_2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]\left[(R_1+R_2)-\frac{\alpha}{R_2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2(3R_2-R_1)\right]}, \tag{18}$$

$$\frac{\alpha}{R_2} \leq \frac{4}{5}. \tag{19}$$

Особо следует рассмотреть случай $A = 0$, когда радиальное давление тождественно равно нулю, а тангенциальное – положительно в любой точке сферической поверхности радиуса r ($R_1 \leq r \leq R_2$). Решения уравнений Эйнштейна с $p_r = 0$ и $p_\perp \neq 0$, интерпретируемые как модели сферически-симметричных кластеров частиц, движущихся по произвольно ориентированным циркулярным орбитам в собственном поле тяготения (полный момент импульса системы равен нулю), исследовались в работах [20-28]. Из равенств (12) и (10) при $A = 0$ следует:

$$p_\perp = \frac{3B^2r^2}{32\pi(1-Br^2)} = \frac{1}{2}\mu\frac{Br^2}{2(1-Br^2)}. \tag{20}$$

Используя статистическое соотношение между давлением и плотностью массы $p_\perp = \mu\upsilon^2/2$, можно определить аналог классической 3-скорости частиц в шаровом слое:

$$\upsilon^2 = \frac{Br^2}{2(1-Br^2)} = \frac{\alpha r^2}{2R_2^3\left(1-\frac{\alpha r^2}{R_2^3}\right)}. \tag{21}$$

Значения этой функции монотонно возрастают с ростом r. Максимум скорости $\upsilon(R_2) = 1$ достигается при $\alpha/R_2 = 2/3$. Следовательно, допустимые значения параметра α/R_2 ограничены неравенством

$$\alpha/R_2 < 2/3. \tag{22}$$

© Академия наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2020 г.

Если через $M(r)=\alpha(r/R_2)^3/2$ обозначить массу, заключенную внутри сферы радиуса r, то выражение (21) для скорости движения частиц вдоль поверхности этой сферы можно записать следующим образом:

$$\upsilon^2=\frac{M(r)}{r\left[1-\left(2M(r)/r\right)\right]}. \qquad (23)$$

Ньютоновский аналог последней формулы имеет вид:

$$\upsilon^2=M(r)/r.$$

IV. Заключение

Следует особо отметить, что полученное аналитическое решение уравнений Эйнштейна (для шарового слоя вещества с источником в центре симметрии) является новым, и ссылки на подобные решения в литературе отсутствуют. Модели, построенные на основе данного решения, могут быть использованы в астрофизике для объяснения физических свойств наблюдаемых релятивистских объектов.

Благодарности. Автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук, проф. Б.Ж. Ахмедову за обсуждение результатов и содействие в публикации данной работы.

Метаданные

Spherical layer of anisotropic matter in an external gravitational field of a central source

I.Sh. Muzhdabaev

Samarkand branch of Tashkent University of Informational Technology, Sh. Mirzo, 47A, 100140, Samarkand, Uzbekistan

A new analytical exact solution of the Einstein gravitational field equations is proposed, which describes the equilibrium state of a spherical layer of anisotropic matter located in an external spherical symmetric Schwarzschild field of a central gravitational source. The ranges of admissible values of the solution parameters are found using conditions at which the obtained solution has a physical meaning. The obtained solution can be used to describe the surrounding matter properties in the close environment of gravitational compact objects in relativistic astrophysics.

Keywords: anisotropic matter, exact solution, gravitating shell, spherical symmetric objects

Литература (References)

[1] W.A. Fowler. Massive stars, relativistic polytropes, and gravitational radiation. Rev. Mod. Phys. **36**, No.2, 545-555; Rev. Mod. Phys. **36**, No.4, 1104E (1964).
[2] J.A. Wheeler. Superdense stars. Ann. Rev. Astron. and Astrophys. **4**, 393-432 (1966).
[3] K.A. Hämeen-Anttila. Relativistic theory of supermassive stars. Ann. Acad. Sci. Fennicae. Suomalain. Tiedeakat, Ser. A VI Phys., No.225, 1-16 (1966).
[4] A.G.W. Cameron. Neutron stars. Ann. Rev. Astron. and Astrophys. **8,** 179-208 (1970).
[5] W.D. Arnett, R.L. Bowers. Neutron star structure. A Survey. Austin: Univ. of Texas Publications in Astronomy **9** (1974).
[6] A.G.W. Cameron, V. Canuto. Neutron stars: General review. In: Proc. 16th Solvay Conf. on Phys. at Brussels, Sept. 1973. Bruxells: édit. de l´Univ., 1974, p. 221-278 .
[7] K. Brecher, G. Caporaso. "Neutron" stars within the laws of physics. Ann. New York Acad. Sci. **302**. 471-481 (1977).
[8] F.G. Smit. Pul'sari (Moskva, Mir, 1979)
[9] G. Baum, Ch. Pethick. Physics of Neutron Stars. Ann. Rev. Astron. and Astrophys. **17**, 415-443 (1979).
[10] R. Manchester, D. Teilor. Pul'sari (Moskva, Mir, 1980).
[11] D. Kramer, Kh. Shtefani, M. Mak-Kallum, E. Kherl't. Tochnie resheniya uravneniy Einsteina Ed. E. Shmutcer (Moskva, Energoizdat, 1982).
[12] L.Sh. Grigorian, G.S. Sahakian. Theory of superdense matter and degenerate stellar configurations. Astrophys. and Space Sci. **95**, No.2, 305-356 (1983).
[13] S.L. Shapiro, S.A. Tyukolski. Chernie diri, belie karliki i neitronnie zvezdi (Moskva, Mir, 1985).
[14] L.Ya. Arifov, I.Sh. Muzhdabaev. Sfericheskie analiticheskie modeli v relyativistskoy teorii gravitatcii. Dep. v VINITI, № 8345-B86 (1986).
[15] Dj. Uiler, B. Garrison, M. Vakano, K. Torn. Teoriya gravitatcii i gravitatcionniy kollaps (Moskva, Mir, 1967)..
[16] Ch. Mizner, K. Torn, Dj. Uiler. Gravitatsiya V.2 (Moskva, Mir, 1977).
[17] C. Leibovitz. An exact solution for a static spherical shell of matter in vacuum. Nuovo Cimento B **59**, No. 1, 33-38 (1969).
[18] T.L. Chow. On the line element of a static spherical shell of matter in vacuum. Nuovo Cimento B **37**, No.2, 214-218 (1977).
[19] I.Sh. Muzhdabaev. Analiticheskie modeli sfericheskogo sloya veshestva s anizotropnim uravneniem sostoyaniya. In abstracts: Nauchno-metodicheskoy konferentsii «Aspekty voennikh, voenno-tekhnicheskikh nauk i ikh prilozheniya (Samarkand, SVVAKIU, 1994).
[20] G.K.Patwardhan, P.C.Vaidya. Relativistic distributions of matter of radial symmetry. J. Univ. Bombay **12**, Part 3, 23-36 (1943).
[21] B.Kuchowicz. General relativistic fluid spheres. IV. Differential equations for non-charged spheres of perfect fluid. Acta Phys. Polon. B **2**. No.5, 657-667 (1971).
[22] P.S.Florides. A new interior Schwarzschild solution. Proc. Roy. Soc. London A **337**, No.1611, 529-535 (1974).

© Академия наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2020 г.

[23] A.F. da F.Teixeira, M.M. Som. On Einstein's stationary spherically symmetric cluster of particles. J. Phys. A **7**, No.7, 838-842 (1974).
[24] A.L. Mehra. An interior solution for a charged sphere in general relativity. Phys. Lett. A **88**, No.4, 159-161 (!982).
[25] N.K. Kofinti. On a new interior Schwarzschild solution. General relations. and gravitation **17**, No.3, 245-249 (1985)
[26] L.S. Solov'ev. Ob ogranichennikh konfiguratsiyakh v obshei teorii otnositel'nosti. (Preprint № 4166/1, Institut atomnoy energii, Moskva, 1985).
[27] L.S. Solov'ev, T.D. Kuznetcova. O gazodinamike i ustoichivosti relyativistskikh zvezd. In book: Problemy teorii gravitatcii i elementarnikh chastits. Vyp.. 15. Red. K.P. Stanyukovich ((Moskva, Energoizdat, 1985).
[28] L.S. Solov'ev. Ob ogranichennikh gravitiruyushikh konfiguratsiyakh v obshei teorii otnositel'nosti. In book: Problemy teorii gravitatsii i elementarnikh chastits. Vyp. 17. Red. V.N. Mel'nikov (Moskva, Energoizdat, 1986).

Марказий манбаънинг ташқи гравитацион майдонида анизотроп модданинг сферик қатлами

И.Ш. Муждабаев

Тошкент информацион технологиялар университетини Самарканд филиали, Ш. Мирзо кўчаси, 47А, 100140, Самарканд, Узб екистан

Марказий гравитацион манбаънинг ташқи сферик симметрик Шварцшильд майдонида жойлашган сферик анизотроп модда қатламининг мувозанат ҳолатини тасвирлайдиган Эйнштейн гравитацион майдон тенгламаларининг янги аналитик аниқ ечими топилди. Ечим параметрлари қийматлари мавжуд бўлган диапазон, бу ечимнинг физик маънога эга бўлиш шартлари орқали топилган. Олинган ечим релятивистик астрофизикада гравитацион компакт объектларнинг яқин атрофидаги модда ҳолатини тасвирлаши мумкин.

Калит сўзлар: анизотропик мода, аниқ ечим, гравитацион қатлам, сферик симметрик объект.

© Академия наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2020 г.